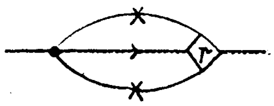
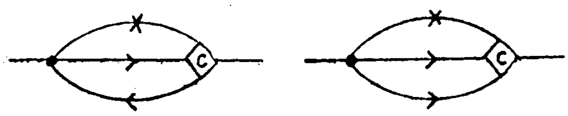
を先取りした理論になっている。



TDGL形

$\varepsilon\ \ell n\ \omega\varepsilon \sim \varepsilon^2\ \ell n\ \omega$



Mode 結合形

$\varepsilon\varepsilon^{-1}\ \ell n\ \omega\varepsilon \sim \varepsilon\ \ell n\ \omega$

ボーズ気体の時間相関関数

阪大・教養　西　山　敏　之

ボーズ粒子系において，非線型相互作用が本質的に役割をもつことは，誘電体中のフォノン間相互作用に類似している。ここでは高密度ボーズ気体に対する集団変数の理論を用いて時間相関関数または動的構造因子 $S(\mathbf{k},\omega)$ を求めることに目標をおくが，集団変数の取扱い方があまりよく知られているとはいえないので，その紹介を主として述べることにしたい。

集団変数の理論では，古典的 Bogoliubov 理論[1]と異なり，ⅰ）運動量ゼロの状態にある粒子の存在を仮定していないこと，ⅱ）２次の摂動計算が収束するという利点がある反面，密度のゆらぎに正準共役な量は存在しないという Fröhlich の批判[2]や，速度演算子は存在しないという London の反論[3]に直面することとなる。他方 Feynman と Cohen の変分理論[4]や Feenberg たちの相関基底関数の方法（method of correlated baisis functions；CBF）[5]はこれらの批判の対象にはならないが，さらに高い近似を得る手順が明らかにされていない。

集団変数の理論としてここでとりあげる密度位相近似（DPO）[6]，Bogoliubov－Zubarev－Hiroike の $\rho_{\mathbf{k}}$－表示（BZH）[7]および Sunakawa et al. の速度演算子の方

法（S）[8] はいずれも高密度ボーズ気体に対して厳密な結果を与え得ることが，１次元ボーズ気体の Lieb−Liniger 模型の厳密解と比較することによって判明している。 初期の（S）理論には発散の困難があったが，これは Yamasaki et al.[9] によって克服された，Takahashi[10] は Lieb−Liniger（LL）の厳密な最低エネルギーの式と励起エネルギーの式を高密度弱結合の極限で展開し，それぞれ次のようになることを示した。

$$E_0 = n^2\left\{\gamma - \frac{4}{3\pi}\gamma^{3/2} + (0.0654\pm 0.0002)\gamma^2\right\} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{4nc}\,\left(1 - \frac{1}{4\pi}\gamma^{1/2}\right)|k| \tag{2}$$

ここで $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ は $k \to 0$ のときの値であり，相互作用ポテンシャルは $\sum_{i \neq j}^{N} c\,\delta(x_i - x_j)$（$2m=\hbar=1$），粒子数密度を n として展開のパラメーター γ は c/n で与えられる。現在では DPO，BZH，YKS[9] はいずれも正しい E_0 の値 (1) と一致する式

$$E_0 = n^2\left\{\gamma - \frac{4}{3\pi}\gamma^{3/2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right)\gamma^2\right\} \tag{3}$$

で与える。励起エネルギーについては，Feynman エネルギー $\varepsilon_{\mathbf{k}}^F = \hbar^2 k^2/(2mS_{\mathbf{k}})$ からのずれを摂動計算で求めることにより，長波長の極限では (2) 式を得る。Takahashi[10] は１次元では，$\gamma \to 0$ の後で $k \to 0$ にすると，摂動計算では正しい式 (2) にならないことを指摘した。正しい式を得るためには，$k \to 0$ の後で $\gamma \to 0$ にしなければならない。これは構造因子 $S_{\mathbf{k}}$ を独立に計算してみることにより，明瞭に理解することができる。$S_{\mathbf{k}}$ を１次元 L−L 模型と３次元荷電ボーズガスについて計算すると，$k \to 0$ では L−L 模型に対して，

$$S_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}}\left(1 + \frac{\gamma^{1/2}}{4\pi}\right),\quad \lambda_{\mathbf{k}} = k/\sqrt{k^2 + 4nc} \tag{4}$$

荷電ボーズガスに対しては，$m = \hbar = 4\pi n e^2 = 1$ とおいて

$$S_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}} + \frac{\sqrt{2}}{32\pi^2 n}\left[B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) - \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=p(N)}^{N}(-1)^{\frac{M+N}{2}}\,2^{M-N-2}\cdot\right.$$
$$\left.\times\,{}_{\frac{M+N}{2}}C_{\frac{N-M}{2}}\,B\left(\frac{7}{4}+\frac{N}{2},\frac{3}{4}\right)\right](k/\kappa)^4 \tag{5}$$

を得る。ただし $\kappa = (16\pi m n e^2/\hbar^2)^{1/4} = \sqrt{2}$ で p(N) はN奇とM奇，N偶とM は0と偶数の組について総和することを表わす。(5) は Family と Gould[11] の数値計算の結果と一致している。(4) を用いた Feynman エネルギーはL−Lの結果と完全に一致している。

動的構造因子 $S(\mathbf{k}, \omega)$ は $k \to 0$ では

$$S(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{F})\,S_{\mathbf{k}}$$

で与えられる。$\omega_{\mathbf{k}}^{F}$ は Feynman 振動数である。一般には感受率関数

$$\chi_{\mathbf{k}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[S(\mathbf{k}, \omega') - S(-\mathbf{k}, -\omega')]}{\omega' - \omega} \frac{d\omega'}{2\pi\hbar}$$

から $\chi_{\mathbf{k}}^{-1}(\omega) = \chi_{\mathbf{k}}^{-1}(0) + M\omega^2/k^2 - M\Gamma_{\mathbf{k}}(\omega)$ の零点を摂動計算によって求め，零点の虚数部分が小さいときには，Cowley の強誘電体の理論[12]と同様な取扱いができるであろう。これらの零点は単一フォノン分枝を与えるものだけでなくて，多重フォノン分枝の分散関係を与えるものが含まれている。$\chi_{\mathbf{k}}^{-1}(0)$ および $\Gamma_{\mathbf{k}}(\omega)$ は，一般に摂動計算で求められるが，液体ヘリウムの問題に応用して中性子散乱の実験結果とかなりよく一致している。[13]

参 考 文 献

1) N. N. Bogolinbov, J. Phys. **11** (1947), 23.
2) H. Fröhlich, Physica **34** (1967), 47.
3) F. London, Rev. Mod. Phys. **17** (1945), 310.
4) R. P. Feynman and M. Cohen, Phys. Rev. **102** (1956), 1189.
5) E. Feenberg, Theory of Quantum Fluids, Academic Press (1969).
6) T. Nishiyama, Prog. Theor. Phys. **7** (1952), 417.
7) K. Hiroike, Prog. Theor. Phys. **21** (1959), 327.
8) S. Sunakawa, S. Yamasaki, and T. Kebukawa, Prog. Theor. Phys. **41** (1969), 919.
9) S. Yamasaki, T. Kebukawa and S. Sunakawa, Prog. Theor. Phys. **54** (1975), 348.
10) M. Takahashi, Prog. Theor. Phys. **53** (1975), 386; **55** (1976), 33.
11) F. Family and H. Gould, Lettere al Nuovo Cimento, **12** (1975), 337.
12) R. A. Cowbey and G. J. Coombs, J. Phys. C. **6** (1973), 121; ibid 143.
13) T. Nishiyama, Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 726; **52** (1974), 1784.